4°/a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $0 < x - g(x) < \frac{x^2}{3}$.

b) Calculer alors $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - x}{x^2}$.

5°/ Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Prouver que ϕ est paire.
b) Montrer que ϕ est continue sur **R**.
c) Montrer que ϕ est dérivable sur **R**.
d) Calculer $\lim_{-\infty} \phi$ et $\lim_{+\infty} \phi$.

Exercice 19 :

Soit $f :]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}.$$

1°/a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Etudier la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$.

b) Etudier les variations de f.

2°/ Montrer que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/ Soit g la réciproque de f.
a) Préciser le domaine de continuité, de dérivabilité de g.
b) Calculer $g'(x)$ pour chaque $x > 0$.

4°/ Soit $\varphi(x) = g(\sqrt{2x}) + g(\sqrt{\frac{2}{x}})$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
b) Calculer $\varphi'(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\varphi(1)$?
c) Calculer enfin $\varphi(x)$ pour $x > 0$.